Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS GTLA

Mathématiques - Groupement B

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction (12 questions) **Page 3**

2. Série de Fourier d'une fonction périodique paire (10 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsgtla.fr/assets/annales/bts-gtla/E2 - Mathématiques/2023/BTS GTLA - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance entre le point M, situé au fond du tiroir, et le point O, au fond du meuble, est modélisée en fonction du temps. L'étude mobilise une équation différentielle, une fonction exponentielle, un algorithme et le calcul d'une position moyenne.

Partie A

Question 1. a. Résoudre l'équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

Pour l'équation du second degré, le discriminant vaut $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$. Comme $\Delta > 0$, il y a deux racines réelles distinctes. Elles sont données par $r = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2}$, soit $r = -1$ et $r = -4$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Les deux solutions de l'équation caractéristique sont $r = -1$ et $r = -4$.

Question 1. b. Résoudre l'équation différentielle y'' + 5y' + 4y = 0 en utilisant le tableau fourni.

L'équation caractéristique associée à $y'' + 5y' + 4y = 0$ est $r^2 + 5r + 4 = 0$. Ses deux racines réelles distinctes sont $r_1 = -1$ et $r_2 = -4$. D'après le tableau fourni, lorsque les racines sont distinctes, chaque racine donne un terme exponentiel dans la solution générale.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La solution générale est $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2. a. À partir de la distance initiale de 20 cm et de la vitesse initiale négative de -10 cm·s⁻¹, déduire les valeurs de f(0) et de f'(0).

La fonction $f(t)$ représente la distance OM, en centimètres. À l'instant initial, cette distance est de 20 cm, donc $f(0) = 20$. La dérivée représente la vitesse de déplacement de M par rapport à O. La vitesse initiale étant négative et égale à -10 cm·s^{-1}, on a $f'(0) = -10$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> À l'instant initial, $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10$ cm·s^{-1}.

Question 2. b. En utilisant l'expression de f(t) fournie, déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.

La fonction donnée est $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$, en centimètres. Deux secondes après le début de la fermeture, on remplace t par 2 : $f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$. Cette expression exacte est la distance demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Après deux secondes, $OM = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$ cm.

Question 2. c. Le tiroir est dit fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Déterminer si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de 4 secondes, et justifier.

À $t = 4$, la distance vaut $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0,4274$ cm, donc elle est inférieure à $0,5$ cm. La fonction est continue : puisque la distance est déjà sous le seuil à 4 s, elle l'est aussi à des instants suffisamment proches avant 4 s. Le constructeur a donc raison.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Oui : le tiroir atteint une distance inférieure à $0,5$ cm avant 4 secondes.

Partie B

Question 1. a. En utilisant la limite rappelée pour e^{-u}, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.

La fonction est $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$. Lorsque t tend vers $+\infty$, les exposants $-t$ et $-4t$ tendent vers $-\infty$. Par la limite rappelée dans le sujet, chacun des deux termes exponentiels tend vers zéro. Leur combinaison tend donc également vers zéro.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La limite de $f(t)$ lorsque $t \to +\infty$ est 0.

Question 1. b. Déduire de la limite précédente que la courbe représentative de f possède une asymptote, puis en donner une équation.

On a établi que $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$. Par définition, lorsque la limite d'une fonction en $+\infty$ est un réel L, sa courbe admet l'asymptote horizontale d'équation $y = L$. Ici, la valeur de cette limite est nulle.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La courbe admet en $+\infty$ l'asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

Question 2. a. Déterminer l'expression de f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.

On dérive chaque terme de $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$ en utilisant $(e^{at})' = ae^{at}$. Le premier terme donne $-\frac{70}{3}e^{-t}$. Pour le second, la dérivée de e^{-4t} est $-4e^{-4t}$, et son coefficient devient donc $\frac{40}{3}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout $t \geq 0$, $f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2. b. Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.

Sur l'intervalle considéré, on admet que $f'(t) < 0$, donc f est strictement décroissante. À l'origine, $f(0) = \frac{70}{3} - \frac{10}{3} = 20$. À l'autre extrémité, sa limite est 0. Le tableau résume ces informations.

t	0		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	20	$\searrow$	0

✓ RÉPONSE À RETENIR

La fonction f décroît strictement de 20 vers 0 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. a. Recopier et compléter le tableau de l'algorithme à partir de la ligne 36, en ajoutant des lignes si nécessaire et en poursuivant jusqu'à l'arrêt. Indiquer les valeurs de f(t), arrondies à 10⁻², et si la condition testée est vraie ou fausse.

La boucle teste si $f(t) > 0,5$, puis augmente t de $0,1$ tant que cette condition est vraie. Les valeurs ci-dessous sont arrondies au centième. La condition est encore vraie à $3,8$ s, mais devient fausse à $3,9$ s : l'algorithme s'arrête alors.

Ligne	t	$f(t)$**, au centième**	**Condition**
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'algorithme s'arrête à la ligne 39, avec $t = 3,9$ s.

Question 3. b. Indiquer la valeur de t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de la fermeture du tiroir.

À $t = 3,8$ s, la condition reste vraie puisque $f(3,8) \approx 0,52 > 0,5$. L'algorithme augmente alors t de $0,1$ s et teste $t = 3,9$ s. Cette fois, $f(3,9) \approx 0,47 < 0,5$, donc la boucle s'arrête et cette valeur correspond à la fermeture du tiroir.

✓ RÉPONSE À RETENIR

À $t = 3,9$ s, la distance est inférieure à $0,5$ cm : le tiroir est fermé.

Question 4. La position moyenne du tiroir est définie par m = 1/4 ∫₀⁴ f(t) dt. Démontrer que m = 45/8 - 35/6 e⁻⁴ + 5/24 e⁻¹⁶.

Une primitive de $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$ est $F(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-4t}$. Ainsi, $m = \frac{1}{4}\big(F(4) - F(0)\big)$. En remplaçant les bornes, on obtient $m = \frac{1}{4}\left(\frac{45}{2} - \frac{70}{3}e^{-4} + \frac{5}{6}e^{-16}\right)$, soit l'expression demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$m = \dfrac{45}{8} - \dfrac{35}{6}e^{-4} + \dfrac{5}{24}e^{-16}$ cm.

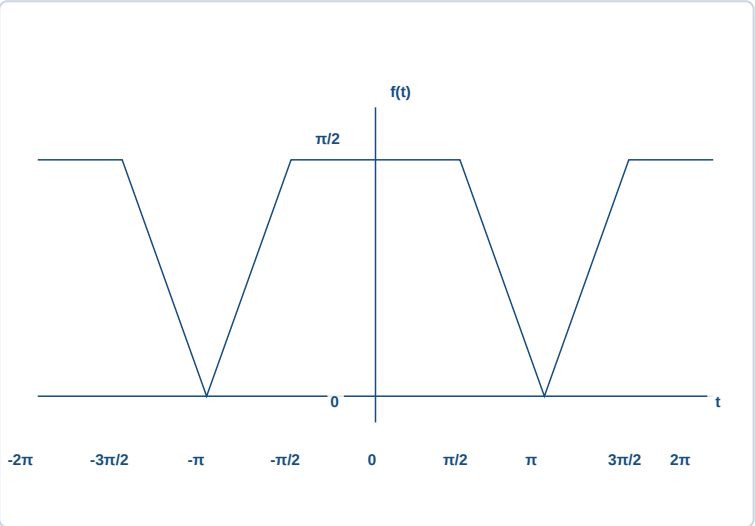
2. Série de Fourier d'une fonction périodique paire

La fonction f est paire, de période 2π, et définie par morceaux sur [0 ; π] : elle vaut π/2 puis π - t. L'exercice porte sur son graphique, ses coefficients de Fourier, sa somme partielle s_3 et l'approximation de sa valeur efficace.

Question 1. Sur le document-réponse, tracer la représentation graphique de f sur l'intervalle [-2π ; 2π], en tenant compte de sa définition, de sa parité et de sa périodicité.

Sur une période, le graphe est constant à $\pi/2$ de $-\pi/2$ à $\pi/2$, puis descend ou remonte linéairement jusqu'à zéro en $-\pi$ et π. La parité rend le motif symétrique par rapport à l'axe vertical. La période 2π répète ce motif : sur l'intervalle demandé, le graphe est nul en $-\pi$ et π, et vaut $\pi/2$ aux deux extrémités.

Représentation de f sur [-2π ; 2π]



✓ RÉPONSE À RETENIR

Graphe périodique pair, de niveau $\pi/2$ aux multiples de 2π, et nul aux multiples impairs de π.

Question 2. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le coefficient de Fourier b_n est nul.

Le formulaire exprime b_n comme une intégrale du produit de $f(t)$ par $\sin(n\omega t)$ sur une période. Comme f est paire et que le sinus est impair, ce produit est impair. Son intégrale sur une période symétrique $[-\pi;\pi]$ est donc nulle. Ici, la pulsation vaut 1, ce qui permet d'écrire directement :

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = 0.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout entier $n \geq 1$, $b_n = 0$.

Question 3. **Déterminer la pulsation ω associée à la fonction f.**

La période donnée dans l'énoncé est $T = 2\pi$. Le formulaire relie la pulsation à la période par $\omega = \frac{2\pi}{T}$. En remplaçant T par sa valeur, le numérateur et le dénominateur se simplifient. La pulsation associée à cette fonction est donc égale à 1, en radians par unité de temps.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\omega = 1$.

Question 4. **Démontrer que le coefficient a_0 est égal à 3π/8.**

Le formulaire donne $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$. Pour une fonction paire de période 2π, cette moyenne s'écrit aussi $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt$. Sur $[0;\pi/2]$, $f(t) = \pi/2$, puis sur $[\pi/2;\pi]$, $f(t) = \pi - t$. On sépare donc l'intégrale au point où la définition change :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{8}\right) = \frac{3\pi}{8}.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $a_0 = \frac{3\pi}{8}$.

Question 5. **Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, a_n = ∫₀^(π/2) cos(nt) dt + (2/π) ∫_(π/2)^π (π - t) cos(nt) dt.**

La formule du formulaire pour une fonction paire est $a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt$. Avec $T = 2\pi$ et $\omega = 1$, le facteur devient $2/\pi$, et l'intégrale va de 0 à π. On la sépare en $\pi/2$, puis on remplace f par sa définition sur chaque intervalle. Sur le premier, le facteur $2/\pi$ se simplifie avec $f(t) = \pi/2$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $a_n = \int_0^{\pi/2}\cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)\,dt$.

Question 6. **En admettant que a_n = 2/(πn²) (cos(nπ/2) - cos(nπ)), déterminer les valeurs exactes de a_1, a_2 et a_3.**

On utilise la formule admise $a_n = \frac{2}{\pi n^2}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(n\pi)\right)$. Pour $n = 1$, la différence vaut 1; pour $n = 2$, elle vaut -2; pour $n = 3$, elle vaut 1. Le remplacement de chaque indice donne les coefficients exacts suivants :

Coefficient	Valeur exacte
a_1	$\frac{2}{\pi}$
a_2	$-\frac{1}{\pi}$
a_3	$\frac{2}{9\pi}$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_1 = \frac{2}{\pi}, \quad a_2 = -\frac{1}{\pi}, \quad a_3 = \frac{2}{9\pi}.$

Question 7. Déduire des coefficients l'expression de la somme partielle $s_3(t) = 3\pi/8 + 2/\pi \cos(t) - 1/\pi \cos(2t) + 2/(9\pi) \cos(3t)$.

La somme partielle d'ordre 3 est $s_3(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{3}(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$. La fonction étant paire, les coefficients b_n sont nuls. On insère alors la valeur de a_0 démontrée à la question 4 et celles de a_1, a_2, a_3 obtenues à la question 6. Cela donne directement l'expression de la somme partielle :

✓ RÉPONSE À RETENIR

$s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t).$

Question 8. Parmi les trois courbes proposées, indiquer sans justification celle qui est associée à la fonction s_3.

La somme s_3 est composée de termes cosinus : son graphe est donc lisse, contrairement aux segments linéaires de la fonction initiale. Elle est paire et périodique de période 2π, avec des creux arrondis près de $t = \pm\pi$ et des zones hautes près de $t = 0$ et des extrémités $\pm 2\pi$. Parmi les trois dessins de la page 5, seul le tracé numéro 3 présente ce profil.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Courbe numéro 3.

Question 9. a. On pose $P = (a_0)^2 + 1/2\,[(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2]$. Donner une valeur approchée de P à 10^{-4} près.

On remplace les coefficients par leurs valeurs exactes dans la définition de P :

$$P = \left(\frac{3\pi}{8}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2}{9\pi}\right)^2\right] = \frac{9\pi^2}{64} + \frac{409}{162\pi^2}.$$

L'évaluation numérique de cette expression, arrondie au dix-millième demandé, donne $1{,}6437$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P \approx 1{,}6437.$

Question 9. b. La valeur efficace F vérifie F² = π²/6 et P constitue une approximation de F². Parmi 0,1 %, 1 % et 10 %, choisir le pourcentage d'erreur de cette approximation. Une seule réponse est attendue, sans justification.

L'erreur relative en pourcentage se calcule en divisant $|P - F^2|$ par la valeur exacte $F^2 = \pi^2/6$, puis en multipliant par 100. Avec $P \approx 1{,}6437$, l'erreur obtenue est d'environ $0{,}074\,\%$. Parmi les trois propositions de l'énoncé, cette valeur est la plus proche de $0{,}1\,\%$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

0,1 %.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS Groupement B, session 2023, porte le code 23MATGRB2 et dure deux heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Les deux exercices évaluent la modélisation de la fermeture d'un tiroir par équation différentielle et étude de fonction, puis l'analyse en série de Fourier d'une fonction périodique paire.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y'' + 5y' + 4y = 0, résoudre d'abord l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$ pour obtenir la forme générale des solutions.
- Dans le modèle du tiroir, f(t) est la distance OM en centimètres et f'(0) représente la vitesse initiale en $cm \cdot s^{-1}$.
- La pulsation d'une fonction de période T est $\omega = 2\pi/T$; si f est paire, ses coefficients sinus b_n sont nuls.
- Pour une fonction paire, le formulaire permet de calculer a_n par une intégrale sur la demi-période : $a_n = 4/T \int_0^{(T/2)} f(t) \cos(n\omega t)\, dt$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités et interpréter le signe de la vitesse dans le modèle du tiroir.
- Distinguer la limite de f, l'équation de l'asymptote et les variations sur [0 ; +∞[.
- Dans l'algorithme, tester la condition à chaque pas et repérer la première valeur pour laquelle elle devient fausse.
- Pour Fourier, appliquer la période et la parité, puis distinguer f de sa somme partielle s_3.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du modèle du tiroir ?

Résolvez d'abord l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle. Ses racines donnent la forme générale de f. Utilisez ensuite les conditions initiales sur la distance et la vitesse pour déterminer les constantes.

Q : Comment la parité de la fonction simplifie-t-elle le calcul des coefficients de Fourier ?

La fonction étant paire, les coefficients des sinus b_n sont nuls. Le formulaire permet aussi de calculer chaque coefficient cosinus sur la moitié de la période, en utilisant l'expression de f sur les différents intervalles.

Q : Comment interpréter l'arrêt de l'algorithme du tiroir ?

L'algorithme augmente t de 0,1 tant que f(t) est supérieure à 0,5. Il s'arrête lorsque cette condition devient fausse ; la valeur finale de t indique alors un instant où le tiroir est fermé selon le critère donné.

Q : Quelles données utiliser pour calculer l'erreur sur l'approximation de F^2 ?

Calculez d'abord P avec les coefficients a_0 à a_3, puis comparez cette approximation à la valeur exacte $F^2 = \pi^2/6$. Pour la dernière question, choisissez une seule des trois réponses proposées, sans justification.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsgtla.fr/assets/annales/bts-gtla/E2 - Mathématiques/2023/BTS GTLA - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Gestion des Transports et Logistique Associée : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.