Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement B

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2 pour les spécialités listées, sauf Traitement des matériaux (2 options) : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation de la fermeture d'un tiroir (14 questions) **Page 3**

2. Probabilités et estimation dans un magasin de vélos (10 questions) **Page 8**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 12**

Sujet officiel (PDF) : https://btsgtla.fr/assets/annales/bts-gtla/E2 - Mathématiques/2023/BTS GTLA - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 1-Sujet.pdf

1. Modélisation de la fermeture d'un tiroir

La distance entre le fond d'un tiroir et le fond du meuble est modélisée par une fonction du temps, exprimée en centimètres. L'exercice étudie cette fonction par une équation différentielle, ses variations, un algorithme de seuil et son développement limité.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

Le discriminant vaut $5^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$. Les racines sont donc $\frac{-5-3}{2}$ et $\frac{-5+3}{2}$. On peut aussi vérifier qu'elles ont pour produit 4 et pour somme -5, conformément aux coefficients du polynôme.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $r = -4$ ou $r = -1$.

Question 1.b. Résoudre l'équation différentielle y'' + 5y' + 4y = 0, en utilisant le tableau fourni.

L'équation caractéristique associée est $r^2 + 5r + 4 = 0$, dont les racines distinctes sont -1 et -4. D'après le tableau fourni, à deux racines réelles distinctes correspondent deux exponentielles. La solution générale, sur l'intervalle indiqué dans le sujet, est leur combinaison linéaire à coefficients réels.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, pour $t \geq 0$.

Partie A - Conditions initiales

Question 2.a. À partir de la position initiale du point M et de sa vitesse, déduire les valeurs de f(0) et de f'(0).

La fonction f représente la distance OM en centimètres. À l'instant initial, cette distance est de 20 cm, donc $f(0) = 20$. La dérivée de cette distance par rapport au temps représente sa vitesse. Le mouvement vers O est donné avec une vitesse négative de -10 cm·s^{-1}, ce qui fixe directement $f'(0)$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10$ cm·s^{-1}.

Question 2.b. **En admettant l'expression donnée de f(t), déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.**

On utilise l'expression admise de f et on remplace t par 2 : $f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$. Cette expression exacte donne la distance OM en centimètres deux secondes après le début de la fermeture. À titre indicatif, elle vaut environ 3,157 cm.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $OM = f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$ cm.

Question 2. **Le tiroir est dit fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Déterminer si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de 4 secondes, en justifiant la réponse.**

À 4 secondes, la distance vaut $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0{,}427$ cm, donc elle est inférieure à 0,5 cm. De plus, f est continue et décroissante sur $[0; +\infty[$, avec $f(0) = 20$ cm. Le seuil de fermeture est donc franchi avant 4 secondes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui. Le tiroir est fermé avant 4 secondes.

Partie B - Étude de fonction

Question 1.a. **En utilisant la limite rappelée de e^{-u} lorsque u tend vers +∞, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.**

Quand $t \to +\infty$, on a $e^{-t} = e^{-u} \to 0$ avec $u = t \to +\infty$. De même, $e^{-4t} \to 0$, en prenant $u = 4t$. Dans l'expression de f, les deux termes tendent donc vers zéro et leur différence tend également vers zéro.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

Question 1.b. **Déduire de la limite précédente que la courbe C possède une asymptote et en donner une équation.**

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est nulle. Par définition, lorsque la fonction tend vers une valeur finie L, sa courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = L$. Ici, cette limite est 0 : l'asymptote est donc l'axe des abscisses.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 0$.

Question 2.a. **Déterminer f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.**

On dérive les deux termes de $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$ en appliquant la règle $(e^{at})' = ae^{at}$. Le premier terme donne $-\frac{70}{3}e^{-t}$. Pour le second, le facteur -4 de l'exposant se combine avec le coefficient $-\frac{10}{3}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f'(t) = -\dfrac{70}{3}e^{-t} + \dfrac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2.b. **Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, établir le tableau de variations de f sur cet intervalle.**

Comme $f'(t) < 0$ sur $[0;+\infty[$, la fonction est strictement décroissante. À l'origine, $f(0) = \frac{70}{3} - \frac{10}{3} = 20$, et sa limite en $+\infty$ vaut 0. Le tableau de variations résume ces valeurs et le sens de variation :

t	**0**	$+\infty$
$f(t)$	20	0
Sens de variation	$20 \searrow 0$	

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît strictement de 20 à 0 sur $[0;+\infty[$.

Question 3.a. **Compléter le tableau de l'algorithme à partir de la ligne numéro 36, en ajoutant des lignes si nécessaire. Indiquer les valeurs de f(t), arrondies à 10^{-2}, et si la condition de la boucle est vraie ou fausse, jusqu'à l'arrêt de l'algorithme.**

La boucle continue tant que $f(t) > 0{,}5$. On évalue donc la fonction à chaque dixième de seconde, puis on teste cette inégalité. Le tableau commence à la ligne 36 et s'arrête au premier test faux :

Ligne	t	$f(t)$**, arrondie à** 10^{-2}	**Condition**
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'algorithme s'arrête à la ligne 39.

Question 3.b. **Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.**

La valeur de $f(3{,}8)$ est supérieure à 0,5, donc la boucle continue. À la ligne suivante, $f(3{,}9) \approx 0{,}47 < 0{,}5$, et la condition devient fausse. La variable t conserve alors la valeur 3,9, qui correspond au premier dixième de seconde où le tiroir satisfait le critère de fermeture.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $t = 3{,}9$ s : le tiroir est fermé.

Partie B - Tangente et développement limité

Question 4.a. **Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.**

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)t$. Les conditions initiales donnent $f(0) = 20$ et $f'(0) = -10$. En les remplaçant dans la formule, on obtient une droite passant par $(0; 20)$, de coefficient directeur -10.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> T : $y = 20 - 10t$.

Question 4.b. **Parmi les propositions à choix multiples, recopier l'unique développement limité de f à l'ordre deux au voisinage de zéro qui convient. Aucune justification n'est demandée.**

Le polynôme de Taylor donné sur la page du sujet est $20 - 10t - 15t^2$. À l'ordre deux, le reste s'écrit $t^2\varepsilon(t)$, où $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. Il faut donc retenir la proposition qui ajoute ce reste au polynôme, et non celles où il est ajouté sans facteur t^2.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Première proposition : $20 - 10t - 15t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 4.c. **À partir du développement limité, indiquer si la courbe C est au-dessus ou en dessous de sa tangente T au voisinage de zéro.**

La tangente a pour équation $y = 20 - 10t$. Le développement limité donne $f(t) - (20 - 10t) = -15t^2 + t^2\varepsilon(t)$. Comme $\varepsilon(t) \to 0$, le terme dominant est $-15t^2$, négatif pour $t \neq 0$ suffisamment proche de zéro. Sur le domaine étudié, la courbe est donc sous sa tangente au voisinage de 0.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La courbe $\mathcal{C}$ est en dessous de T au voisinage de 0.

2. Probabilités et estimation dans un magasin de vélos

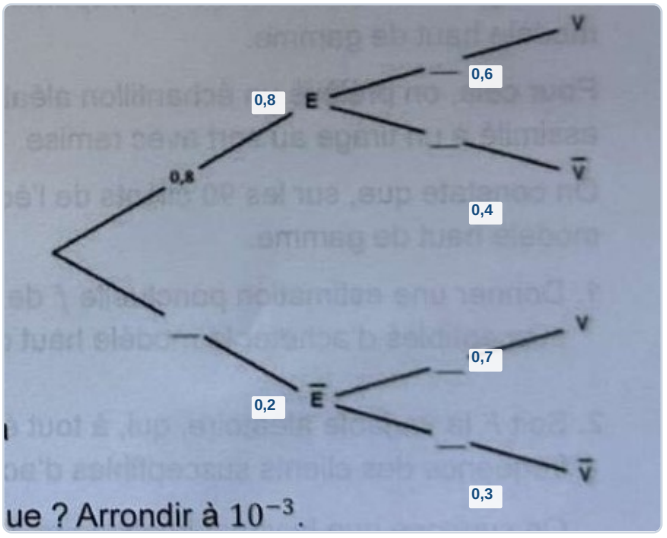
Un magasin prête des vélos électriques ou mécaniques dans l'espoir de réaliser des ventes, et étudie les durées de réparation de vélos. Il estime aussi la proportion de clients susceptibles d'acheter un modèle haut de gamme à partir d'un échantillon.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Recopier et compléter l'arbre pondéré décrivant le type de vélo prêté et l'éventuelle vente.

La première bifurcation indique le type de vélo : électrique avec une probabilité de 0,8, mécanique avec une probabilité de 0,2. Depuis chaque type, les branches « vente » et « pas de vente » portent les probabilités conditionnelles correspondantes. Les probabilités de non-vente se déduisent par complément à 1.

Arbre pondéré complété



✓ RÉPONSE À RETENIR

Électrique : 0,8 ; mécanique : 0,2. Après électrique : vente 0,6, pas de vente 0,4. Après mécanique : vente 0,7, pas de vente 0,3.

Question 2. Déterminer la probabilité P(E ∩ V), où E désigne l'événement « le vélo est électrique » et V l'événement « le prêt débouche sur une vente ».

Le chemin correspondant à l'événement « vélo électrique et vente » est celui de E suivi de V. La probabilité de ce chemin est le produit de la probabilité d'obtenir un vélo électrique et de la probabilité conditionnelle d'une vente pour ce type de vélo : $P(E \cap V) = P(E) \times P_E(V) = 0,8 \times 0,6 = 0,48$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(E \cap V) = 0,48$.

Question 3. **Démontrer que la probabilité qu'un prêt débouche sur une vente est égale à 0,62.**

Une vente peut concerner un vélo électrique ou un vélo mécanique. Ces deux cas sont incompatibles, donc on additionne leurs probabilités : $P(V) = P(E \cap V) + P(\overline{E} \cap V)$. Les probabilités des deux chemins sont $0,8 \times 0,6 = 0,48$ et $0,2 \times 0,7 = 0,14$. Ainsi, $P(V) = 0,48 + 0,14 = 0,62$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(V) = 0,62$.

Question 4. **Sachant que le prêt d'un vélo a débouché sur une vente, déterminer la probabilité qu'il s'agisse d'un vélo électrique. Arrondir à 10^{-3}.**

Parmi les prêts ayant débouché sur une vente, la probabilité que le vélo soit électrique se calcule par $P_V(E) = \dfrac{P(E \cap V)}{P(V)}$. Avec les probabilités calculées précédemment, $P_V(E) = \dfrac{0,48}{0,62} \approx 0,7741935$. L'arrondi au millième est donc 0,774.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P_V(E) \approx 0,774$.

Partie B - Loi binomiale

Question 1. **On admet que X suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.**

La variable X compte, parmi 80 réparations, celles qui nécessitent moins d'une heure de main-d'œuvre. Chaque réparation constitue un essai de probabilité de succès 0,62. Le nombre d'essais est fixe et les réparations sont modélisées par une loi binomiale. Ses paramètres sont donc le nombre d'essais $n = 80$ et la probabilité de succès $p = 0,62$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $X \sim \mathcal{B}(80\,;\,0,62)$.

Question 2. **Déterminer la probabilité P(X = 40). Arrondir à 10^{-3}.**

Pour une variable binomiale de paramètres 80 et 0,62, la formule donne $P(X = 40) = \binom{80}{40}(0,62)^{40}(1-0,62)^{40}$. Comme $1 - 0,62 = 0,38$, on obtient environ 0,008273. Arrondi au millième, le résultat est 0,008.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(X = 40) \approx 0,008$.

Question 3. **Déterminer la probabilité que, dans l'échantillon, le nombre de vélos nécessitant moins d'une heure de main-d'œuvre soit strictement supérieur au nombre de vélos nécessitant plus d'une heure. Arrondir à 10^{-3}.**

Si X vélos nécessitent moins d'une heure, les autres, soit $80 - X$, nécessitent plus d'une heure dans le modèle de l'exercice. La condition demandée est $X > 80 - X$, donc $X \geq 41$. On calcule alors $P(X \geq 41) = 1 - P(X \leq 40) \approx 0,98096$, soit 0,981 au millième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité cherchée est $P(X \geq 41) \approx 0,981$.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. **À partir des 54 clients sur 90 susceptibles d'acheter le modèle haut de gamme, donner une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p.**

L'estimation ponctuelle de la proportion inconnue est la fréquence observée dans l'échantillon. Ici, 54 des 90 clients interrogés sont susceptibles d'acheter le modèle haut de gamme. On calcule donc $f = \frac{54}{90} = 0,6$, soit 60 %.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f = 0,6$, soit $60\,\%$.

Question 2.a. **En utilisant la formule fournie, déterminer un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % pour la proportion p.**

Avec la formule fournie, l'intervalle est centré sur $f = 0,6$, avec une marge de $1,96\sqrt{\frac{0,6(1-0,6)}{90}} \approx 0,101214$.

Borne	Calcul	Arrondie à 0,001
Inférieure	0,6 − 0,101214	0,499
Supérieure	0,6 + 0,101214	0,701

L'intervalle demandé est donc obtenu en arrondissant ses deux bornes au millième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Intervalle de confiance à 95 % : $[0,499\,;\,0,701]$.

Question 2.b. Indiquer si l’on est certain que la proportion p appartient à cet intervalle de confiance.

Non. Le niveau de confiance de 95 % décrit la méthode utilisée : sur un grand nombre d’échantillons, environ 95 % des intervalles ainsi construits contiendraient la proportion réelle. Il ne garantit pas que l’intervalle obtenu à partir de cet échantillon particulier contienne cette proportion.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non, l’appartenance de la proportion à cet intervalle n’est pas certaine.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS Groupement B, session 2023, code 23MATGRB1, dure deux heures et comporte deux exercices de 10 points. Le coefficient est 2 pour les spécialités listées, sauf Traitement des matériaux, coefficient 3. Le sujet étudie la fermeture d'un tiroir puis un magasin de vélos, mobilisant équations différentielles, analyse de fonctions, probabilités, loi binomiale et estimation par intervalle de confiance.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y'' + 5y' + 4y = 0$, l'équation caractéristique associée est $r^2 + 5r + 4 = 0$.
- La tangente à la courbe de f au point d'abscisse a a pour équation $y = f(a) + f'(a)(t - a)$.
- $P(E \cap V) = P(E)P(V \mid E)$, et $P(V)$ se calcule en additionnant les probabilités des chemins menant à V.
- Une variable binomiale de paramètres n et p compte les succès de n essais indépendants ayant chacun une probabilité de succès p.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités de distance et de temps dans le modèle de fermeture du tiroir.
- Distinguer probabilité d'intersection et probabilité conditionnelle, en respectant l'ordre des branches de l'arbre.
- Pour les probabilités binomiales, identifier précisément le succès et traduire la comparaison demandée avant le calcul.
- Un intervalle de confiance à 95 % ne garantit pas avec certitude que la proportion inconnue y appartient.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du modèle du tiroir ?

On résout d'abord l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$. Ses racines réelles distinctes donnent les exponentielles de la solution générale, puis les conditions initiales permettent de déterminer leurs coefficients.

Q : Comment interpréter l'intervalle de confiance à 95 % de la dernière partie ?

L'intervalle est calculé à partir de la fréquence observée et de la formule fournie. Le niveau de confiance de 95 % ne signifie pas que l'on est certain que la proportion inconnue appartient à l'intervalle obtenu.

Q : Comment répartir son temps et comprendre le barème de cette épreuve ?

La durée est de deux heures et chacun des deux exercices vaut 10 points. Le sujet ne donne pas de répartition des points par question, donc prévoyez du temps pour les deux exercices et vérifiez les arrondis.

Q : Que faut-il vérifier pour le développement limité et la position de la courbe ?

Repérez le terme de degré deux dans le développement limité et comparez la courbe à sa tangente en étudiant le signe du premier terme non nul après la partie affine, au voisinage de zéro.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsgtla.fr/assets/annales/bts-gtla/E2 - Mathématiques/2023/BTS GTLA - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 1-Sujet.pdf
Ressources BTS Gestion des Transports et Logistique Associée : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.