Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS GTLA

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2 pour les spécialités indiquées, sauf Traitement des matériaux : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation de la vitesse et du freinage d'un chariot (12 questions) **Page 3**

2. Contrôle des tubes fluorescents et estimation de la conformité des rivets (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsgtla.fr/assets/annales/bts-gtla/E2 - Mathématiques/2022/BTS GTLA - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

1. Modélisation de la vitesse et du freinage d'un chariot

Un chariot de fête foraine avance à 20 m/s au début du freinage, et sa vitesse est modélisée par une fonction définie sur [0 ; +∞[. Les trois parties étudient une équation différentielle, les variations et l'intégrale de la vitesse, puis le développement limité et la tangente à sa courbe.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1. a. Résoudre sur l'intervalle considéré l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0.

La formule du sujet donne les solutions de l'équation homogène sous la forme $y(t) = Ce^{-at}$. En prenant $a = 0,8$, on obtient toutes les solutions sur l'intervalle $[0; +\infty[$, où C est une constante réelle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0,8t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 1. b. Pour g(t) = 5, vérifier que g est une solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

La fonction constante $g(t) = 5$ a pour dérivée $g'(t) = 0$. En la substituant dans le membre de gauche, on trouve $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. Le membre de gauche est donc égal au second membre, ce qui vérifie que g est une solution.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est une solution de $y' + 0,8y = 4$.

Question 1. c. Déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

La fonction $g(t) = 5$ est une solution particulière de l'équation avec second membre. Toute autre solution s'obtient en lui ajoutant une solution de l'équation homogène associée, trouvée à la question précédente. L'ensemble des solutions est donc constitué de la constante 5 et d'un terme exponentiel de constante arbitraire.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + Ce^{-0,8t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

On remplace t par 0 dans la solution générale : $f(0) = 5 + C$, car $e^0 = 1$. La condition initiale impose $5 + C = 20$, donc $C = 15$. En reportant cette constante dans la solution générale, on obtient la fonction recherchée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1. a. Pour f(t) = 15e^(-0,8t) + 5, démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ vaut 5.

Lorsque t tend vers $+\infty$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$, donc $e^{-0,8t}$ tend vers 0. Dans $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, le terme exponentiel disparaît à la limite et il reste la constante 5.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1. b. Déduire de la limite précédente que la courbe C admet une asymptote, et donner une équation de celle-ci.

La limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$ est finie et vaut 5. Par définition, la courbe représentative C admet alors une asymptote horizontale en $+\infty$, dont l'ordonnée est cette limite.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. En utilisant l'expression admise f'(t) = -12e^(-0,8t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$. Ainsi, f est strictement décroissante. De plus, $f(0) = 20$ et la limite en $+\infty$ vaut 5.

t	**0**	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$	
Variation de f	20	$\searrow 5$

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. **À partir du modèle de vitesse, déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.**

Pour tout instant fini $t \geq 0$, l'exponentielle est strictement positive. Ainsi, $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$, donc la vitesse ne s'annule jamais. Selon ce modèle, elle se rapproche de 5 m/s lorsque le temps augmente, sans atteindre zéro.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : le chariot ne s'arrête pas selon ce modèle, sa vitesse tend vers $5\ \mathrm{m/s}$.

Question 4. a. **Vérifier que F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.**

En dérivant $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$, on obtient $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5$. Le produit des coefficients vaut 15, donc $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$. Ainsi, F est bien une primitive de f sur l'intervalle demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t)$: F est une primitive de f.

Question 4. b. **Calculer la distance exacte parcourue par le chariot entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$ à l'aide de l'intégrale de f, puis donner une valeur arrondie au centimètre.**

La distance est l'intégrale de la vitesse entre 0 et 1, donc $d = F(1) - F(0)$. En utilisant la primitive donnée, on obtient $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ mètres. L'évaluation numérique donne environ $15,3251$ m, soit un arrondi au centimètre de $15,33$ m.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8} \approx 15,33\ \mathrm{m}$.

Partie C - Étude locale

Question 1. **Parmi les propositions, choisir le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro, en tenant compte de la forme du reste indiquée. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.**

Le développement de l'exponentielle est $e^{-0,8t} = 1 - 0,8t + 0,32t^2 + o(t^2)$. En multipliant par 15 puis en ajoutant 5, on obtient $20 - 12t + 4,8t^2 + o(t^2)$. Parmi les choix de la page 5, seule la troisième proposition écrit le reste sous la forme $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Troisième proposition : $20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)t$. On a $f(0) = 20$ et, avec la dérivée indiquée dans le sujet, $f'(0) = -12e^0 = -12$. La tangente passe donc par $(0; 20)$ et a pour pente -12.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y = 20 - 12t$.

2. Contrôle des tubes fluorescents et estimation de la conformité des rivets

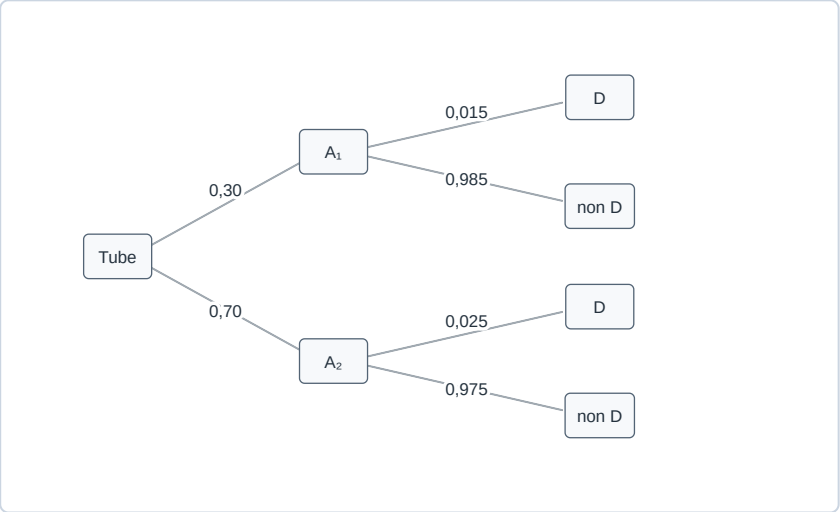
Une usine produit des tubes fluorescents dans deux ateliers et contrôle leur conformité, puis leur durée de fonctionnement est modélisée par une loi exponentielle. Une dernière partie porte sur l'estimation de la proportion de rivets conformes à partir d'un échantillon de 1 000 rivets.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Construire un arbre pondéré représentant l'atelier de provenance du tube et la présence ou l'absence d'un défaut, à partir des proportions de production et des taux de défaut donnés.

La première étape distingue les deux ateliers selon leurs parts de production. Depuis chaque atelier, on indique ensuite les probabilités conditionnelles de défaut et d'absence de défaut. Ces probabilités complémentaires totalisent 1 pour chaque atelier. L'arbre ci-dessous reprend les pourcentages de l'énoncé sous forme décimale et permet de lire directement les chemins associés aux événements.

Arbre pondéré des ateliers et des défauts



D : le tube présente un défaut.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Branches : A_1 : 0,30 ; A_2 : 0,70. Depuis A_1 : D : 0,015 ; non D : 0,985. Depuis A_2 : D : 0,025 ; non D : 0,975.

Question 2. Calculer la probabilité qu'un tube choisi au hasard provienne de l'atelier 1 et présente un défaut.

Le tube doit provenir de l'atelier 1, puis être défectueux parmi les tubes de cet atelier. On multiplie donc la proportion de production de l'atelier 1 par son taux conditionnel de défaut : $P(A_1 \cap D) = P(A_1)P(D \mid A_1) = 0,30 \times 0,015 = 0,0045$. Le résultat est une probabilité sur l'ensemble des tubes produits, et non le taux de défaut parmi les seuls tubes de l'atelier 1.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_1 \cap D) = 0,0045$, soit $0,45\,\%$.

Question 3. Calculer la probabilité qu'un tube choisi au hasard présente un défaut à partir des données de production des deux ateliers.

Un tube défectueux provient nécessairement de l'un des deux ateliers. Les deux chemins de l'arbre menant à un défaut sont donc disjoints ; on calcule chaque probabilité de chemin par un produit, puis on additionne les résultats.

Atelier	Calcul	Contribution
1	0,30 × 0,015	0,0045
2	0,70 × 0,025	0,0175

Ainsi, $P(D) = 0,0045 + 0,0175 = 0,022$. Cette valeur correspond à la correction manuscrite visible sur le sujet.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(D) = 0,022$, soit $2,2\,\%$.

Question 4. Sachant que le tube choisi ne présente pas de défaut, calculer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.

La probabilité cherchée est conditionnée par l'absence de défaut. Le numérateur est la probabilité d'obtenir un tube de l'atelier 2 sans défaut : $P(A_2 \cap \overline{D}) = 0,70 \times 0,975 = 0,6825$. Le dénominateur vaut $P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0,022 = 0,978$. On applique alors la formule de probabilité conditionnelle.

$P(A_2 \mid \overline{D}) = \frac{0,6825}{0,978} \approx 0,698$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité qu'il provienne de l'atelier 2 est d'environ $0,698$, soit $69,8\,\%$.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. La durée de bon fonctionnement T suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0,0001. Déterminer son espérance et interpréter le résultat dans le contexte.

Pour une loi exponentielle de paramètre λ, l'espérance est $E(T) = \frac{1}{\lambda}$. En remplaçant λ par la valeur donnée, on obtient $E(T) = \frac{1}{0,0001} = 10\,000$ heures. Dans ce contexte, cela signifie que la durée moyenne de bon fonctionnement des tubes est de 10 000 heures. Il s'agit d'une moyenne statistique, pas d'une durée garantie pour chaque tube.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(T) = 10\,000$ heures : durée moyenne de bon fonctionnement d'un tube.

Question 2. **Calculer, à 10^{-2} près, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube prélevé soit inférieure à 8 000 heures.**

La formule fournie donne $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Une loi exponentielle étant continue, les probabilités $P(T < 8\,000)$ et $P(T \leq 8\,000)$ sont égales. En utilisant $\lambda = 0,0001$, on obtient $1 - e^{-0,0001 \times 8\,000} = 1 - e^{-0,8} \approx 0,55067$. L'arrondi au centième demandé est donc effectué sur cette valeur.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T < 8\,000) \approx 0,55$, soit environ $55\,\%$.

Question 3. **Calculer, à 10^{-2} près, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube prélevé soit supérieure à 10 000 heures.**

La probabilité de dépasser 10 000 heures est le complément de la probabilité de ne pas dépasser cette durée. Par la formule de la loi exponentielle, $P(T > 10\,000) = 1 - P(T \leq 10\,000) = e^{-0,0001 \times 10\,000} = e^{-1} \approx 0,36788$. On arrondit cette valeur au centième, comme demandé dans l'énoncé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T > 10\,000) \approx 0,37$, soit environ $37\,\%$.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. **À partir des 975 rivets conformes observés parmi 1 000 rivets prélevés, donner une estimation ponctuelle de la proportion inconnue de rivets conformes.**

L'estimation ponctuelle de la proportion inconnue est la fréquence observée dans l'échantillon. Sur les 1 000 rivets contrôlés, 975 sont conformes, donc $f = \frac{975}{1\,000} = 0,975$. Cette fréquence sert d'estimation de la proportion de rivets conformes dans l'ensemble de la production.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f = 0,975$, soit une estimation ponctuelle de $97,5\,\%$.

Question 2. **En utilisant la formule fournie, déterminer un intervalle de confiance de niveau 95 % centré sur la fréquence observée pour la proportion de rivets conformes. Arrondir les bornes à 10^{-3} près.**

La formule de l'énoncé utilise la fréquence observée $f = 0,975$ et l'effectif $n = 1\,000$. La marge vaut $1,96\sqrt{\frac{0,975(1-0,975)}{1\,000}} \approx 0,009677$. L'intervalle centré sur f est donc $[0,975 - 0,009677\ ;\ 0,975 + 0,009677]$. Les bornes, arrondies au millième, sont :

Borne	Valeur arrondie
Inférieure	0,965
Supérieure	0,985

✓ RÉPONSE À RETENIR

Intervalle de confiance à 95 % : $[0,965\ ;\ 0,985]$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, groupement B, session 2022, code 22MATGRB1, durée deux heures, avec coefficient 2 ou 3 selon la spécialité. Elle comprend deux exercices de 10 points : modélisation du freinage d'un chariot et étude de conformité et de durée de vie de tubes fluorescents, puis estimation de conformité de rivets. Les compétences portent sur équations différentielles, analyse, intégration, probabilités et statistique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les solutions de y' + ay = 0 sont y(t) = ke^(-at) ; une solution particulière donne ensuite les solutions de l'équation complète.
- Si f(t) = 15e^(-0,8t) + 5, alors sa limite en +∞ vaut 5 et la courbe admet l'asymptote horizontale y = 5.
- Pour une loi exponentielle de paramètre λ, E(T) = 1/λ et P(T ≤ t) = 1 - e^(-λt).
- L'intervalle fourni pour une proportion est f ± 1,96√(f(1-f)/n), où f est la fréquence observée.

Points de vigilance & attentes du jury

- Appliquer la condition initiale f(0) = 20 après avoir déterminé la forme générale des solutions de l'équation différentielle.
- Interpréter la limite de la vitesse : une vitesse qui tend vers 5 m/s ne signifie pas que le chariot s'arrête.
- Distinguer les probabilités P(T ≤ t) et P(T > t), avec les durées en heures comme dans l'énoncé.
- Utiliser la fréquence observée et la taille de l'échantillon dans l'intervalle de confiance, puis respecter les arrondis demandés.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer la vitesse du chariot à partir de l'équation différentielle ?

Résolvez d'abord l'équation homogène, puis ajoutez une solution particulière de l'équation complète. Déterminez enfin la constante en imposant la condition initiale f(0) = 20.

Q : Comment calculer la probabilité que la durée de vie dépasse un seuil ?

L'énoncé donne P(T ≤ t) = 1 - e^(-λt). Pour obtenir P(T > t), utilisez l'événement contraire : P(T > t) = e^(-λt), avec t exprimé en heures.

Q : Comment répartir mon temps pendant cette épreuve de deux heures ?

Le sujet comporte deux exercices de 10 points, chacun avec des parties annoncées indépendantes. Répartissez le temps entre les exercices, puis gardez quelques minutes pour vérifier les calculs, les unités et les arrondis.

Q : Le coefficient de l'épreuve est-il identique pour toutes les spécialités du groupement B ?

Non. Le tableau de la page de garde indique un coefficient 2 pour les spécialités listées, sauf Traitement des matériaux, dont le coefficient est 3. La durée est de deux heures et les deux exercices valent chacun 10 points.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsgtla.fr/assets/annales/bts-gtla/E2 - Mathématiques/2022/BTS GTLA - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

Ressources BTS Gestion des Transports et Logistique Associée : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.