Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2018 • Code sujet : **MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Variable selon la spécialité : 1, 1,5, 2, 2,5 ou 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation du départ d'un train à très haute vitesse et calcul d'une aire (13 questions) **Page 3**

2. Probabilités et test d'hypothèse sur l'obsolescence programmée des smartphones (13 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 14**

Sujet officiel (PDF) : https://btsgtla.fr/assets/annales/bts-gtla/E2 - Mathématiques/2018/BTS GTLA - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf

1. Modélisation du départ d’un train à très haute vitesse et calcul d’une aire

Un projet de train à propulsion électromagnétique vise une vitesse de 400 km/h en moins de deux minutes, et sa distance parcourue est modélisée par une fonction. L’exercice étudie cette fonction par équation différentielle et dérivation, puis calcule l’aire d’une pièce prévue pour une gare à partir d’un schéma et d’une fonction.

A. Résolution d’une équation différentielle

Question A.1. Résoudre sur [0, +∞[l’équation différentielle homogène (E0) : y' - 0,2y = 0.

On compare l’équation à la forme fournie $y' + ay = 0$. Ici, $a = -0,2$. Les solutions sont donc $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. Comme le domaine demandé est $[0, +\infty[$, cette expression vaut pour tout $t \geq 0$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{0,2t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question A.2. Vérifier que g, définie sur [0, 3] par g(t) = -15t - 75, est une solution de l’équation différentielle (E) : y' - 0,2y = 3t.

On dérive $g(t) = -15t - 75$, ce qui donne $g'(t) = -15$. Remplaçons y par g dans le membre de gauche de (E) : $g'(t) - 0,2g(t) = -15 - 0,2(-15t - 75) = 3t$. On retrouve bien le membre de droite de l’équation différentielle.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g'(t) - 0,2g(t) = 3t$, donc g est solution de (E).

Question A.3. Déduire de la solution particulière g et des solutions de (E0) l’ensemble des solutions de l’équation différentielle (E).

La différence entre deux solutions de (E) est une solution de l’équation homogène (E0). Or, les solutions de (E0) sont $ke^{0,2t}$, et une solution particulière de (E) est $g(t) = -15t - 75$. Toute solution de (E) s’obtient donc en ajoutant ces deux expressions.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{0,2t} - 15t - 75$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question A.4. Déterminer la fonction f solution de (E) vérifiant la condition initiale f(0) = 0, sachant qu’au temps t = 0 le wagon est au point de départ.

On part de la solution générale $y(t) = ke^{0,2t} - 15t - 75$. La condition initiale impose $f(0) = k - 75 = 0$, donc $k = 75$. En remplaçant la constante par cette valeur, on obtient la fonction de distance qui vérifie le point de départ.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 75(e^{0,2t} - 1) - 15t$.

B. Étude de fonction et application

Question B.1.a. Résoudre sur [0, 3] l'inéquation f'(t) ≥ 0, à partir des expressions de f(t) et de f'(t) fournies par le logiciel de calcul formel.

Le calcul formel donne $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$. Puisque l'exponentielle est croissante, $e^{0,2t} \geq 1$ équivaut à $0,2t \geq 0$, donc à $t \geq 0$. Cette condition est vérifiée sur tout l'intervalle étudié : la dérivée y est non négative.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f'(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, 3]$.

Question B.1.b. Déduire de la question précédente les variations de f sur l'intervalle [0, 3].

Comme $f'(t) \geq 0$ sur $[0, 3]$, la fonction est croissante sur cet intervalle. Elle part de $f(0) = 0$ et atteint en $t = 3$ la valeur $75(e^{0,6} - 1) - 45$, soit environ $16,659$. Les valeurs aux bornes permettent de résumer les variations.

t	**0**	**3**
$f(t)$	0	$16,659$
Variation	Croissante	

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f est croissante de 0 à environ $16,659$ sur $[0, 3]$.

Question B.2. Déterminer le nombre de kilomètres parcourus au bout d'une minute, sachant que f(t) donne la distance parcourue en kilomètres. Arrondir le résultat au dixième.

La distance parcourue après une minute est $f(1)$. En utilisant l'expression de la fonction, on obtient $f(1) = 75(e^{0,2} - 1) - 15 \approx 1,6052$ km. L'énoncé demande un arrondi au dixième, donc on arrondit cette valeur à une décimale.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $1,6$ km.

Question B.3.a. Sachant que la vitesse du wagon à l'instant t, en kilomètres par minute, correspond à f'(t), déterminer sa vitesse à t = 2 minutes et arrondir au dixième.

La vitesse instantanée est donnée par $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$, en kilomètres par minute. À deux minutes, on calcule $f'(2) = 15(e^{0,4} - 1) \approx 7,3774$ km/min. L'arrondi au dixième demandé s'obtient en gardant une décimale.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $7,4$ km/min.

Question B.3.b. **Déterminer si l'objectif des ingénieurs est atteint et justifier la réponse au regard de la vitesse visée et du délai imposé.**

À deux minutes, la vitesse vaut environ $7,3774$ km/min, soit $7,3774 \times 60 \approx 442,6$ km/h. La fonction vitesse $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$ est continue et croissante, et elle vaut 0 à l'instant initial. Comme elle dépasse 400 km/h à deux minutes, elle atteint ce seuil avant deux minutes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui, le seuil de 400 km/h est atteint en moins de deux minutes.

Question B.4. **Choisir, sans justification, parmi les trois propositions l'équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 2 : y = 15(e^0,4 - 1)t ; y = 15(e^0,4 - 1)t + 45e^0,4 ; ou y = 15(e^0,4 - 1)t + 45e^0,4 - 75.**

La formule de la tangente au point d'abscisse 2 est $y = f'(2)(t - 2) + f(2)$. En remplaçant par les expressions de $f'(2)$ et de $f(2)$, on obtient l'équation correspondant à la troisième proposition.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y = 15(e^{0,4} - 1)t + 45e^{0,4} - 75$.

C. Calcul intégral

Question C.1. **Choisir, sans justification, l'aire A1 du rectangle OPQR parmi les propositions suivantes : 3, 5,25 ou 6,75 unités d'aire.**

Sur le schéma, le rectangle OPQR s'étend de $x = 0$ à $x = 3$, et son bord supérieur est la droite $y = 2,25$. Sa largeur vaut donc 3 et sa hauteur 2,25. Son aire est le produit de ces deux dimensions, exprimé en unités d'aire.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $A_1 = 6,75$ unités d'aire.

Question C.2. **Calculer l'aire A2, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe de g(x) = 27x/(2x² + 18), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 3, en utilisant la primitive fournie.**

La fonction g est positive sur $[0, 3]$, donc l'aire recherchée est l'intégrale de g sur cet intervalle. La primitive fournie est $\frac{27}{4}\ln(x^2 + 9) + c_1$. En évaluant aux deux bornes, la constante s'élimine et l'on obtient $A_2 = \frac{27}{4}\ln(18/9)$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $A_2 = \frac{27}{4}\ln 2 \approx 4,679$ unités d'aire.

Question C.3. **Déduire des questions précédentes l'aire A de la pièce hachurée, en tenant compte de la symétrie indiquée dans le schéma, et arrondir au millième.**

Sur la moitié droite, l'aire hachurée est l'aire du rectangle moins l'aire sous la courbe : $A_1 - A_2$. La pièce étant symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, l'aire totale est le double de cette différence. On utilise les valeurs exactes de A_1 et A_2, puis on arrondit le résultat au millième.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$A = 2(A_1 - A_2) \approx 4,143$ unités d'aire.

2. Probabilités et test d’hypothèse sur l’obsolescence programmée des smartphones

L’exercice étudie deux formes d’obsolescence programmée dans une population de smartphones, puis la réparabilité d’un lot de modèles A. Il se termine par un test bilatéral portant sur une affirmation de sondage concernant la marque B, à partir d’un échantillon de 180 personnes.

A. Probabilités conditionnelles

Question A.1. À partir des données sur les obsolescences technique et logicielle dans une population de 200 smartphones, compléter le tableau d’effectifs croisant les deux types d’obsolescence et indiquer les totaux.

Sur 200 smartphones, 3 % donnent 6 appareils touchés par l’obsolescence technique et 8 % donnent 16 appareils touchés par l’obsolescence logicielle. Parmi ces 16, 12,5 % sont aussi touchés techniquement, soit 2 appareils. Les autres cases se calculent par différence avec les totaux.

Smartphones	Touchés par l’obsolescence logicielle	Non touchés par l’obsolescence logicielle	Total
Touchés par l’obsolescence technique	2	4	6
Non touchés par l’obsolescence technique	14	180	194
Total	16	184	200

Effectifs croisés des obsolescences

Obsolescence technique	Logicielle : oui	Logicielle : non	Total
Oui	2	4	6
Non	14	180	194
Total	16	184	200

Effectifs pour 200 smartphones.

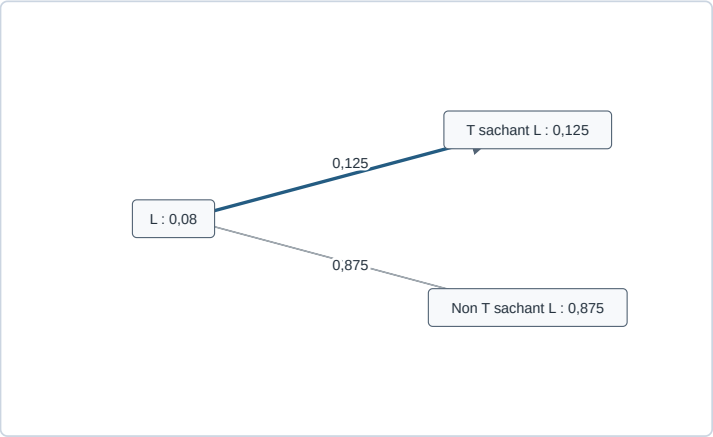
✓ RÉPONSE À RETENIR

Effectifs croisés : 2, 4, 14 et 180 ; totaux : 6, 194, 16, 184 et 200.

Question A.2. Pour T : « le smartphone est touché par l’obsolescence technique » et L : « le smartphone est touché par l’obsolescence logicielle », donner P(T), P(L) et P_L(T), la probabilité de T sachant L.

Les proportions des appareils touchés par chaque type d’obsolescence donnent directement les probabilités de T et de L. L’énoncé précise aussi que, parmi les appareils touchés par L, 12,5 % sont touchés par T : cette proportion est la probabilité conditionnelle de T sachant L.

Probabilités conditionnelles des obsolescences



La probabilité de T sachant L vaut 12,5 %.

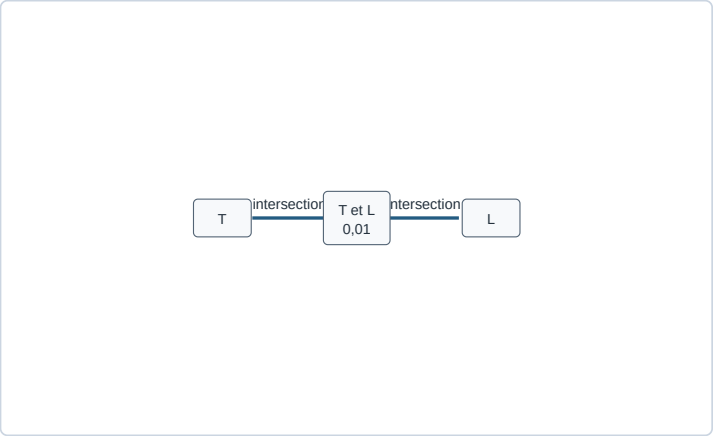
✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T) = 0{,}03$, $P(L) = 0{,}08$ et $P_L(T) = 0{,}125$.

Question A.3.a. Calculer la probabilité P(T ∩ L) qu'un smartphone soit touché à la fois par l'obsolescence technique et par l'obsolescence logicielle.

La définition de la probabilité conditionnelle donne $P(T \cap L) = P(L) \times P_L(T)$. On utilise la proportion touchée par l'obsolescence logicielle, puis la proportion de ces appareils également touchée techniquement. Ainsi, $0{,}08 \times 0{,}125 = 0{,}01$.

Intersection des deux obsolescences



La zone commune correspond à 1 % des smartphones.

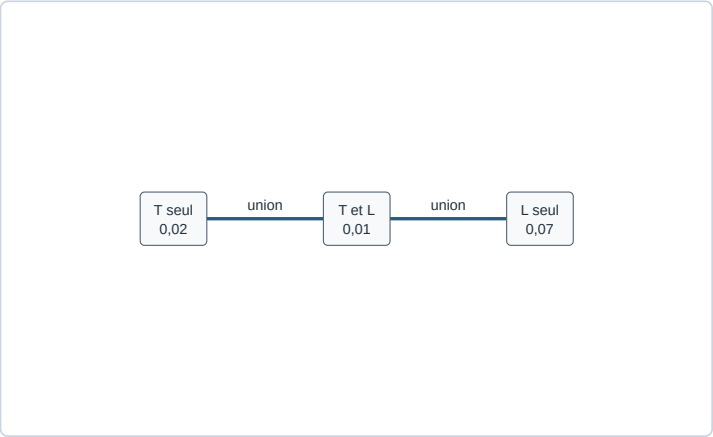
✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T \cap L) = 0{,}01$, soit 1 %.

Question A.3.b. Calculer la probabilité P(T ∪ L) qu'un smartphone soit touché par au moins l'un des deux types d'obsolescence.

L'événement « au moins un type d'obsolescence » est l'union de T et L. En additionnant leurs probabilités, l'intersection est comptée deux fois : on la soustrait donc une fois. Le calcul est $P(T \cup L) = 0{,}03 + 0{,}08 - 0{,}01 = 0{,}10$.

Décomposition de l'union T ou L



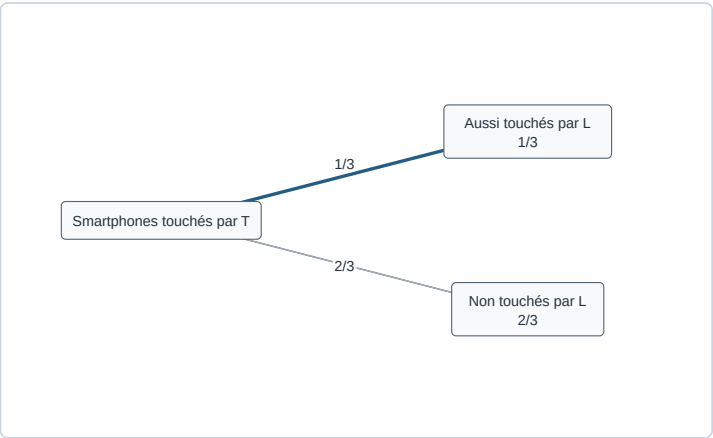
L'union réunit les trois zones : T seul, T et L, L seul.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T \cup L) = 0{,}10$, soit 10 %.

Question A.3.c. Calculer P_T(L), la probabilité d'une obsolescence logicielle sachant que le smartphone est touché par l'obsolescence technique.

La probabilité d'être touché par L sachant que l'appareil est touché par T se calcule en divisant l'intersection par la probabilité de T : $P_T(L) = \dfrac{P(T \cap L)}{P(T)}$. On obtient $0{,}01 / 0{,}03 = 1/3$, soit environ 0,333 au millième.

Répartition parmi les smartphones touchés par T



Les probabilités sont conditionnées par T.

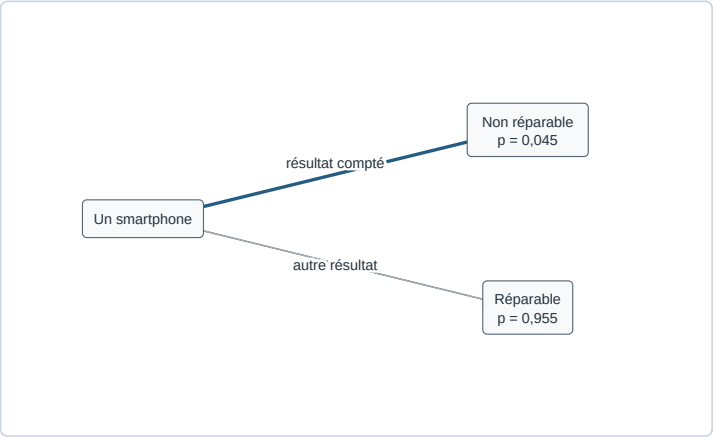
> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P_T(L) = \dfrac{1}{3} \approx 0{,}333$, soit 33,3 %.

B. Loi binomiale

Question B.1. Justifier que X, le nombre de smartphones non réparables parmi 50 appareils prélevés, suit une loi binomiale et en déterminer les paramètres.

Chaque prélèvement est une épreuve de Bernoulli : l'appareil est non réparable avec probabilité 0,045. Le stock étant assez important pour assimiler le prélèvement à des tirages avec remise, les 50 épreuves sont indépendantes et de même probabilité. X compte le nombre de résultats « non réparable » : il suit donc une loi binomiale de paramètres 50 et 0,045.

Une épreuve de réparabilité



50 épreuves indépendantes ; X compte les appareils non réparables.

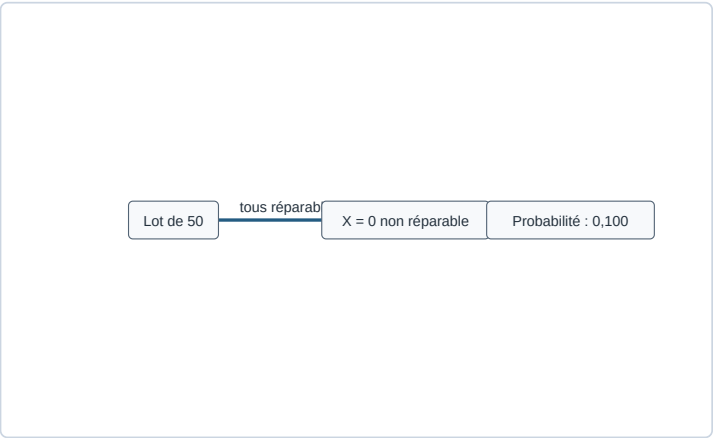
✓ RÉPONSE À RETENIR

$X \sim \mathcal{B}(50\,;\,0{,}045)$.

Question B.2. Calculer la probabilité que, dans un lot de 50 smartphones, tous les appareils soient réparables.

Tous les appareils sont réparables lorsque le nombre d'appareils non réparables est nul, c'est-à-dire lorsque $X = 0$. Pour la loi binomiale de paramètres 50 et $0{,}045$, la probabilité vaut $P(X = 0) = (1 - 0{,}045)^{50} = 0{,}955^{50}$, soit environ 0,100 au millième.

Événement : les 50 appareils sont réparables



Il s'agit de la probabilité P(X = 0).

✓ RÉPONSE À RETENIR

La probabilité que les 50 smartphones soient réparables est $0{,}100$, soit environ 10 %.

Question B.3.a. Faire tourner à la main l'algorithme donné, qui additionne P(X = i) pour i allant de 0 à 3, puis compléter le tableau avec les valeurs de P(X = i) et de S.

À chaque étape, l'algorithme ajoute $P(X = i) = \binom{50}{i}(0{,}045)^i(0{,}955)^{50-i}$ à la somme précédente. Les probabilités et les sommes successives ci-dessous sont arrondies au millième, comme demandé dans l'exercice.

i	0	1	2	3
P(X = i)	0,100	0,236	0,272	0,205
S après ajout	0,100	0,336	0,608	0,813

Calcul pas à pas de la somme binomiale

i	0	1	2	3
P(X = i)	0,100	0,236	0,272	0,205
S	0,100	0,336	0,608	0,813

Probabilités et sommes cumulées, arrondies au millième.

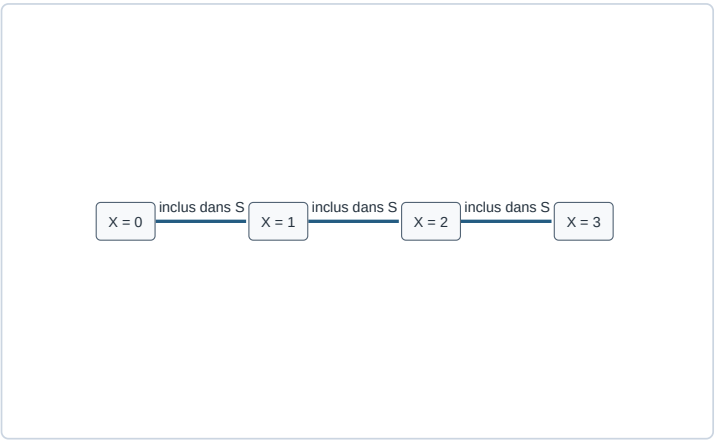
✓ RÉPONSE À RETENIR

P(X = i) : 0,100 ; 0,236 ; 0,272 ; 0,205. Sommes successives : 0,100 ; 0,336 ; 0,608 ; 0,813.

Question B.3.b. Donner la valeur de S à la fin de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte du lot de smartphones.

La boucle additionne les probabilités correspondant successivement à $X = 0$, $X = 1$, $X = 2$ et $X = 3$. Ainsi, la somme finale représente la probabilité qu'un lot contienne au plus trois smartphones non réparables : $S = P(X \leq 3)$. L'algorithme donne $S \approx 0{,}813$.

Événement cumulé calculé par l'algorithme



S additionne les probabilités pour X = 0, 1, 2 et 3.

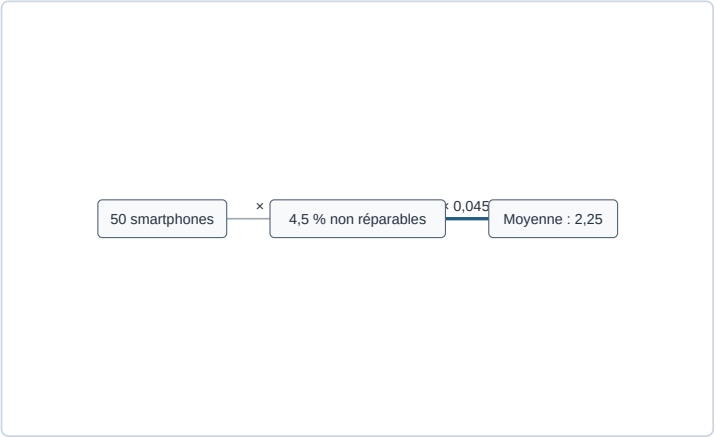
✓ RÉPONSE À RETENIR

$S = P(X \leq 3) = 0{,}813$: environ 81,3 % des lots ont au plus 3 appareils non réparables.

Question B.4. Calculer l'espérance de X et interpréter sa valeur dans le contexte du nombre de smartphones non réparables dans un lot de 50.

Pour une loi binomiale de paramètres n et p, l'espérance est $E(X) = np$. Ici, $E(X) = 50 \times 0{,}045 = 2{,}25$. Cette valeur est une moyenne théorique : sur un grand nombre de lots de 50 appareils, le nombre de smartphones non réparables par lot sera en moyenne de 2,25.

Interprétation de l'espérance du lot



L'espérance est une moyenne sur un grand nombre de lots.

✓ RÉPONSE À RETENIR

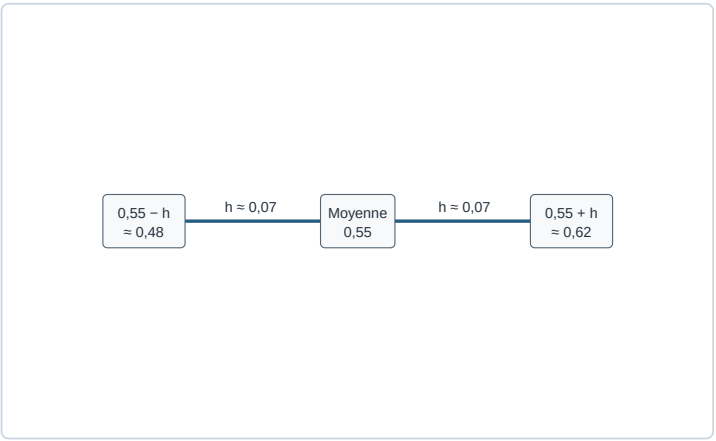
$E(X) = 2{,}25$: un lot de 50 smartphones compte en moyenne 2,25 appareils non réparables.

C. Test d'hypothèse

Question C.1. Sous H0 : p = 0,55, F suit une loi normale de moyenne 0,55 et d'écart type 0,037. Choisir la valeur de h, arrondie à 10^-2, parmi 0,05, 0,06 et 0,07, sachant que P(0,55 - h ≤ F ≤ 0,55 + h) = 0,95.

Pour une loi normale, l'intervalle central contenant 95 % des valeurs s'écrit approximativement $[\mu - 1{,}96\sigma\,;\,\mu + 1{,}96\sigma]$. Ici, la demi-largeur vaut $h \approx 1{,}96 \times 0{,}037 = 0{,}07252$. Arrondie au centième, elle vaut 0,07, parmi les trois choix proposés.

Intervalle central à 95 % sous H₀



Intervalle central approximatif de probabilité 0,95.

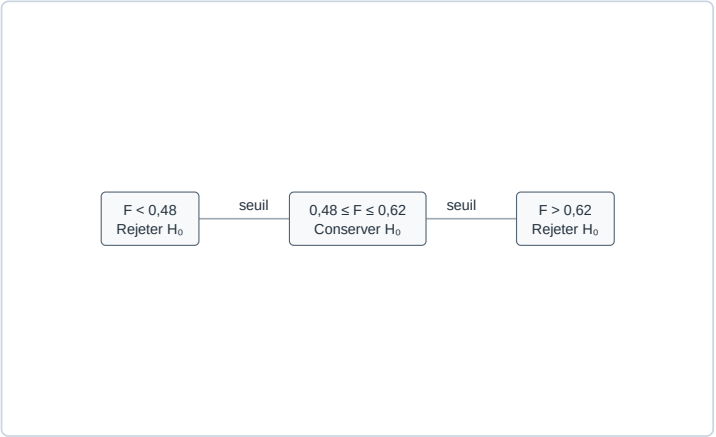
✓ RÉPONSE À RETENIR

$h = 0{,}07$ au centième.

Question C.2. Énoncer la règle de décision du test bilatéral de H0 : p = 0,55 contre H1 : p ≠ 0,55, au seuil de signification de 5 %.

Le test est bilatéral au seuil de 5 %. Avec la demi-largeur arrondie à 0,07, on conserve l'hypothèse nulle si la fréquence observée appartient à l'intervalle centré en 0,55. Si elle est à l'extérieur de cet intervalle, on rejette H_0 au profit de H_1.

Règle de décision bilatérale



Décision au seuil de signification de 5 %.

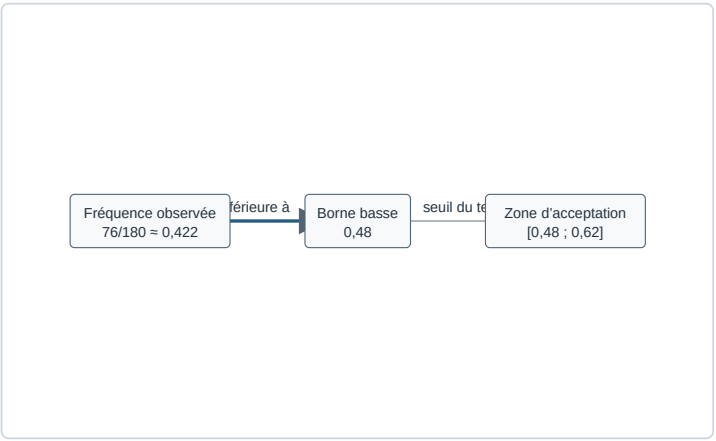
✓ RÉPONSE À RETENIR

Conserver H_0 si $0{,}48 \leq F \leq 0{,}62$; sinon, rejeter H_0.

Question C.3. Dans l'échantillon de 180 personnes, 76 déclarent que la marque B pratique l'obsolescence programmée. Appliquer le test et formuler la conclusion.

La fréquence observée est $f = 76/180 \approx 0{,}422$. Elle est inférieure à la borne basse 0,48 de l'intervalle d'acceptation. On rejette donc H_0 au seuil de 5 % : les données conduisent à conclure que la proportion diffère de 55 %, et elles indiquent une proportion plus faible.

Fréquence observée et intervalle du test



La fréquence observée se situe dans la région de rejet.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f \approx 0{,}422 < 0{,}48$: rejet de H_0 ; la proportion observée est plus faible que 55 %.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2018)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, groupement B, session 2018, code MATGRB1, d'une durée de 2 heures. Le coefficient varie selon la spécialité, de 1 à 3. Les deux exercices, notés chacun sur 10 points, portent sur le départ d'un train à très haute vitesse et l'obsolescence programmée des smartphones. Les compétences évaluées couvrent équations différentielles, fonctions, intégrales, probabilités et test d'hypothèse.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour une équation différentielle linéaire avec second membre, la solution générale est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.
- La vitesse instantanée est la dérivée de la distance : ici, f'(t) s'exprime en kilomètres par minute.
- Pour X suivant une loi binomiale de paramètres n et p, E(X) = np et P(X = i) = C(n,i)p^i(1-p)^(n-i).
- Un test bilatéral au seuil de 5 % compare la fréquence observée à l'intervalle d'acceptation associé à l'hypothèse nulle.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités : le temps est en minutes, la distance en kilomètres et la vitesse en kilomètres par minute.
- Pour l'aire hachurée, utiliser la symétrie du schéma et distinguer l'aire du rectangle de celle sous la courbe.
- En probabilité conditionnelle, identifier l'événement qui conditionne avant d'appliquer la formule.
- Pour le test, calculer la fréquence observée puis la comparer à la règle de décision au seuil de 5 %.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer la fonction distance à partir de l'équation différentielle ?

Résolvez d'abord l'équation homogène, puis ajoutez une solution particulière de l'équation avec second membre. Utilisez ensuite la condition initiale f(0) = 0 pour déterminer la constante et identifier la fonction distance.

Q : Comment relier la dérivée de la distance à la vitesse du wagon ?

La dérivée f'(t) donne la vitesse instantanée lorsque f représente la distance et t le temps. Comme la distance est en kilomètres et le temps en minutes, la vitesse obtenue est en kilomètres par minute.

Q : Comment organiser les deux heures et le barème de l'épreuve ?

Le sujet comporte deux exercices de 10 points, soit 20 points au total, et dure deux heures. Les trois parties de chaque exercice peuvent être traitées indépendamment, ce qui permet de commencer par les questions les plus accessibles.

Q : Quelles règles d'arrondi et de justification faut-il respecter ?

Dans l'exercice 2, arrondissez les résultats à 10^-3 sauf indication contraire. Dans l'exercice 1, les arrondis sont précisés question par question. Justifiez les calculs demandés, mais pas les QCM qui excluent explicitement une justification.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsgtla.fr/assets/annales/bts-gtla/E2 - Mathématiques/2018/BTS GTLA - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf
Ressources BTS Gestion des Transports et Logistique Associée : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.