Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV©

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
www.formav.co/explorer

Correction détaillée – BTS Mathématiques – Groupement C1 – Session 2024

En-tête

- **Session :** 2024
- **Groupement :** C1
- **Durée :** 2 heures
- **Calculatrice :** Autorisée (mode examen actif ou type collège sans mémoire)

EXERCICE 1 (10 points)

Énoncé résumé

On étudie le séchage de poutres en épicéa (pavé droit de 4 m de long, base carrée de 5 cm de côté). On modélise la teneur en humidité par une équation différentielle, puis on exploite graphiquement et analytiquement la fonction modélisant cette teneur.

PARTIE A – Modélisation de la teneur en humidité

1. Calcul de la surface exposée à l'air

Résumé : Calculer l'aire de la surface du bois exposée à l'air (96 % de la surface totale).

La poutre est un pavé droit de longueur 4 m et de section carrée de côté 5 cm = 0,05 m.

- Surface totale = surface latérale + 2 × surface des bases
- Surface latérale : 4 côtés × longueur × largeur = 4 × 4 m × 0,05 m = 0,8 m^2
- Surface des bases : 2 × (0,05 m × 0,05 m) = 2 × 0,0025 m^2 = 0,005 m^2
- Surface totale = 0,8 m^2 + 0,005 m^2 = 0,805 m^2
- Surface exposée = 96 % de 0,805 m^2 = 0,96 × 0,805 = 0,7728 m^2

Surface exposée à l'air : 0,7728 m^2

Point de méthode : Surface d'un pavé droit = surface latérale + 2 × surface des bases.
Erreur fréquente : Oublier de convertir les centimètres en mètres ou négliger les bases.

---

2. Étude de l'équation différentielle

On considère l'équation différentielle $y' + 0{,}03864\, y = 0{,}003864$.

a. Vérification d'une solution particulière

On pose $g(t) = 0{,}1$.

- $g'(t) = 0$
- $g'(t) + 0{,}03864 \times g(t) = 0 + 0{,}03864 \times 0{,}1 = 0{,}003864$

Donc $g(t) = 0{,}1$ est bien solution particulière de (E).

$g(t) = 0{,}1$ est une solution particulière de (E).

Point de méthode : Remplacer dans l'équation pour vérifier.
Erreur fréquente : Oublier de dériver la constante (qui donne 0).

b. Solutions de l'équation homogène (E_0)

Équation homogène : $y' + 0{,}03864\, y = 0$

- C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.
- Solution générale : $y(t) = A \times e^{-0{,}03864\, t}$, avec $A \in \mathbb{R}$.

Les solutions de (E_0) sont $y(t) = A \times e^{-0{,}03864\, t}$.

Point de méthode : Reconnaître et résoudre une équation différentielle linéaire homogène.
Erreur fréquente : Oublier le signe négatif dans l'exposant.

c. Solutions générales de (E)

La solution générale est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'homogène :

- $y(t) = A \times e^{-0{,}03864\, t} + 0{,}1$

$y(t) = A \times e^{-0{,}03864\, t} + 0{,}1$

Point de méthode : Solution générale = solution homogène + solution particulière.
Erreur fréquente : Oublier d'ajouter la solution particulière.

d. Détermination de la fonction f avec la condition initiale

On sait que $f(0) = 80\ \% = 0{,}8$.

- $f(0) = A \times e^0 + 0{,}1 = A + 0{,}1 = 0{,}8$
- $A = 0{,}8 - 0{,}1 = 0{,}7$
- D'où $f(t) = 0{,}7 \times e^{-0{,}03864\, t} + 0{,}1$

$f(t) = 0{,}7 \times e^{-0{,}03864\, t} + 0{,}1$

Point de méthode : Utiliser la condition initiale pour déterminer la constante.
Erreur fréquente : Oublier de convertir le pourcentage en valeur décimale.

PARTIE B – Temps de séchage (lecture graphique)

1. Teneur en humidité après 20 semaines

Résumé : Lire graphiquement la valeur de f(20).

- Sur le graphique, à $t = 20$ semaines, la courbe semble passer à environ 18 %.

Après 20 semaines, la teneur en humidité est d'environ **18 %**.

Point de méthode : Savoir lire précisément une valeur sur un graphique.

Erreur fréquente : Confondre l'axe des abscisses (temps) et des ordonnées (teneur).

2. Temps nécessaire pour atteindre une humidité inférieure à 20 %

Résumé : Déterminer graphiquement à quel temps f(t) passe sous 20 %.

- Sur le graphique, la courbe coupe le niveau 20 % vers $t \approx 17$ semaines.

Les poutres peuvent être vendues après environ **17 semaines** de séchage.

Point de méthode : Repérer l'intersection courbe/niveau sur le graphique.
Erreur fréquente : Ne pas arrondir à l'unité ou mal lire l'axe.

PARTIE C – Étude analytique de la fonction f

On admet ici $f(t) = 0{,}7 \times e^{-0{,}04\,t} + 0{,}1$.

1.a. Limite de f(t) quand t → +∞ et interprétation

- Quand $t \to +\infty$, $e^{-0{,}04\,t} \to 0$
- Donc $f(t) \to 0{,}1$

Interprétation : la teneur en humidité tend vers 10 % à long terme, c'est-à-dire qu'il reste toujours une humidité résiduelle minimale dans le bois.

$\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0{,}1$ (soit 10 % d'humidité résiduelle)

Point de méthode : Savoir calculer la limite d'une fonction exponentielle décroissante.
Erreur fréquente : Oublier que e^{-kt} tend vers 0 et non vers l'infini.

1.b. Conjecture sur les variations de f

Au vu du contexte (le bois sèche), la teneur en humidité diminue avec le temps, donc f est **décroissante** sur $[0 ; +\infty[$.

La fonction f est décroissante sur $[0 ; +\infty[$.

1.c. Étude des variations de f

- $f(t) = 0{,}7 \times e^{-0{,}04\,t} + 0{,}1$
- Calcul de la dérivée :
  - $f'(t) = 0{,}7 \times (-0{,}04) \times e^{-0{,}04\,t} = -0{,}028 \times e^{-0{,}04\,t}$
- Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0{,}04\,t} > 0$, donc $f'(t) < 0$
- Donc f est strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$.

La fonction f est strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$.

Point de méthode : Dériver une fonction exponentielle composée.
Erreur fréquente : Oublier le signe négatif du coefficient de la dérivée.

2.a. Résolution de l'inéquation f(t) ≤ 0,2

On cherche $t \geq 0$ tel que $0,7 \times e^{-0,04\,t} + 0,1 \leq 0,2$

- $0,7 \times e^{-0,04\,t} \leq 0,1$
- $e^{-0,04\,t} \leq 0,1 / 0,7 \approx 0,142857$
- Prendre le logarithme népérien :
    - $-0,04\,t \leq \ln(0,142857)$
    - $t \geq -\ln(0,142857) / 0,04$
    - $\ln(0,142857) \approx -1,9459$
    - $t \geq 1,9459 / 0,04 \approx 48,65$

Arrondi à l'unité : $t \geq 49$

Pour que $f(t) \leq 0,2$, il faut **t ≥ 49 semaines** (arrondi à l'unité).

Point de méthode : Isoler l'exponentielle puis prendre le logarithme.
Erreur fréquente : Oublier d'inverser le sens de l'inégalité après division par un nombre négatif (ici ce n'est pas le cas car on divise par 0,04 > 0).

2.b. Interprétation

Il faut attendre **49 semaines** pour que la teneur en humidité descende à 20 % ou moins selon ce modèle.

Le bois atteint une humidité ≤ 20 % après **49 semaines** de séchage selon ce modèle.

EXERCICE 2 (10 points)

Énoncé résumé

On étudie la production de vis sur deux chaînes, avec des probabilités de défaut différentes. On modélise la probabilité d'obtenir un défaut, puis on étudie la loi binomiale pour des lots, et enfin la conformité des vis via la loi normale.

PARTIE A – Production de vis

1. Compléter l'arbre pondéré

- $P(C_1) = 0,4$
- $P(C_2) = 0,6$
- $P(D \mid C_1) = 3/1000 = 0,003$
- $P(\bar{D} \mid C_1) = 1 - 0,003 = 0,997$
- $P(D \mid C_2) = 5/1000 = 0,005$
- $P(\bar{D} \mid C_2) = 1 - 0,005 = 0,995$

Arbre complété :

- **Premier niveau :**
    - C_1 : 0,4

    - C_2 : 0,6
- **Deuxième niveau :**
    - Depuis C_1 :
        - D : 0,003
        - $\bar{D}$: 0,997
    - Depuis C_2 :
        - D : 0,005
        - $\bar{D}$: 0,995

Point de méthode : Les branches issues d'un même nœud doivent avoir des probabilités qui s'additionnent à 1.
Erreur fréquente : Oublier de convertir les pourcentages/fractions en décimales.

2. Probabilité que la vis provienne de la première chaîne et présente un défaut

- $P(C_1 \cap D) = P(C_1) \times P(D \mid C_1) = 0{,}4 \times 0{,}003 = 0{,}0012$

P(la vis provient de la première chaîne et présente un défaut) = **0,0012**

Point de méthode : Probabilité conjointe = probabilité du chemin dans l'arbre.
Erreur fréquente : Multiplier dans le mauvais ordre ou additionner au lieu de multiplier.

3. Probabilité qu'une vis présente un défaut

- $P(D) = P(C_1 \cap D) + P(C_2 \cap D)$
- $P(C_2 \cap D) = 0{,}6 \times 0{,}005 = 0{,}003$
- $P(D) = 0{,}0012 + 0{,}003 = 0{,}0042$

P(une vis présente un défaut) = **0,0042**

Point de méthode : Loi des probabilités totales.
Erreur fréquente : Oublier de sommer les deux branches.

4. Probabilité qu'une vis défectueuse provienne de la première chaîne

- $P(C_1 \mid D) = P(C_1 \cap D) / P(D) = 0{,}0012 / 0{,}0042 \approx 0{,}2857$
- Soit environ 28,6 %

Donc, il est **faux** de dire qu'il y a moins de 25 % de chances : il y a environ 29 %.

La probabilité que la vis défectueuse provienne de la première chaîne est d'environ **29 %** (donc plus de 25 %).

Point de méthode : Utiliser la formule de probabilité conditionnelle.
Erreur fréquente : Inverser les événements ou oublier de diviser par la probabilité totale.

PARTIE B – Étude d'un lot

1. Loi suivie par X

On prélève 50 vis, chaque vis a une probabilité 0,004 d'être défectueuse, indépendamment.

- X = nombre de vis défectueuses dans le lot
- X suit la loi binomiale de paramètres n = 50 ; p = 0,004

X suit la loi binomiale B(n = 50 ; p = 0,004)

Point de méthode : Loi binomiale : nombre d'épreuves indépendantes, deux issues possibles.
Erreur fréquente : Prendre p = 0,0042 au lieu de 0,004.

2.a. Probabilité d'avoir exactement 2 vis défectueuses

- $P(X = 2) = C_{50}{}^{2} \times 0{,}004^{2} \times 0{,}996^{48}$
- $C_{50}{}^{2} = 1225$
- $0{,}004^{2} = 0{,}000016$
- $0{,}996^{48} \approx e^{48 \times \ln(0{,}996)} \approx e^{-0{,}192} \approx 0{,}8256$
- $P(X = 2) \approx 1225 \times 0{,}000016 \times 0{,}8256 \approx 0{,}0162$
- Arrondi au millième : 0,016

$P(X = 2) \approx$ **0,016**

Point de méthode : Calculer une probabilité binomiale : $C_{n}{}^{k} \times p^{k} \times (1 - p)^{n - k}$.
Erreur fréquente : Oublier le coefficient binomial ou mal arrondir.

2.b. Probabilité d'avoir au moins 3 vis défectueuses

- $P(X \geq 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2)$
- $P(X = 0) = 0{,}996^{50} \approx e^{50 \times \ln(0{,}996)} \approx e^{-0{,}2} \approx 0{,}819$
- $P(X = 1) = 50 \times 0{,}004 \times 0{,}996^{49} \approx 50 \times 0{,}004 \times 0{,}822 \approx 0{,}164$
- $P(X = 2) \approx 0{,}016$ (voir ci-dessus)
- $P(X \geq 3) \approx 1 - 0{,}819 - 0{,}164 - 0{,}016 = 0{,}001$

$P(X \geq 3) \approx$ **0,001**

Point de méthode : Pour « au moins k », faire $1 - P(X < k)$.
Erreur fréquente : Oublier de soustraire toutes les valeurs inférieures à 3.

PARTIE C – Conformité des vis (loi normale)

1. Probabilité qu'une vis soit conforme

- L suit $N(\mu = 60 ; \sigma = 0{,}25)$
- Conforme ⇔ $59{,}60 \leq L \leq 60{,}40$

- On standardise :
  - $Z = (L - 60) / 0{,}25$
  - Pour $L = 59{,}60$: $Z = (59{,}60 - 60)/0{,}25 = -1{,}6$
  - Pour $L = 60{,}40$: $Z = (60{,}40 - 60)/0{,}25 = 1{,}6$
- $P(-1{,}6 \leq Z \leq 1{,}6) \approx 2 \times P(Z \leq 1{,}6) - 1$
- $P(Z \leq 1{,}6) \approx 0{,}945$
- $P(-1{,}6 \leq Z \leq 1{,}6) \approx 2 \times 0{,}945 - 1 = 0{,}89$
- Arrondi au centième : 0,89

Probabilité qu'une vis soit conforme ≈ **0,89**

Point de méthode : Standardiser, utiliser la table de la loi normale.
Erreur fréquente : Oublier de centrer ou d'utiliser le bon écart type.

2.a. Hypothèse alternative H_1

- $H_0 : \mu = 60$
- Test bilatéral : $H_1 : \mu \neq 60$

Hypothèse alternative : **$\mu \neq 60$**

2.b. Règle de décision du test

- On accepte H_0 si la moyenne L de l'échantillon vérifie $59{,}95 \leq L \leq 60{,}05$
- Sinon, on rejette H_0

Règle de décision : **On accepte H_0 si $59{,}95 \leq L \leq 60{,}05$**

Point de méthode : Intervalles de confiance pour un test bilatéral.
Erreur fréquente : Oublier que le test est bilatéral (deux bornes).

2.c. Application du test (moyenne échantillon = 60,03)

- $60{,}03 \in [59{,}95 ; 60{,}05] \Rightarrow$ On accepte H_0
- Conclusion : Le réglage de la machine est correct.

On accepte H_0 : **le réglage de la première chaîne est correct**.

Formulaire récapitulatif

- **Surface d'un pavé droit :** S = 2 × (longueur × largeur + longueur × hauteur + largeur × hauteur)
- **Équation différentielle :** $y' + a\,y = b \Rightarrow$ solution générale : $y(t) = A \times e^{-a\,t} + b/a$
- **Loi binomiale :** $P(X = k) = C_n^{\,k} \times p^k \times (1 - p)^{n-k}$
- **Loi normale :** Standardisation : $Z = (X - \mu)/\sigma$; $P(a \leq X \leq b) = P((a - \mu)/\sigma \leq Z \leq (b - \mu)/\sigma)$
- **Probabilité conditionnelle :** $P(A \mid B) = P(A \cap B) / P(B)$

Conseils généraux pour réussir l’épreuve de mathématiques en BTS

- **Lisez attentivement chaque question** et repérez les données importantes avant de commencer les calculs.
- **Soignez la rédaction** : expliquez chaque étape, justifiez vos réponses, encadrez vos résultats.
- **Vérifiez les unités** et les conversions (cm, m, %, etc.) pour éviter les erreurs d’inattention.
- **Utilisez la calculatrice à bon escient** : vérifiez vos arrondis et notez les valeurs intermédiaires.
- **Relisez-vous** : une relecture attentive permet de corriger de nombreuses erreurs de calcul ou de raisonnement.

© FormaV EI. Tous droits réservés.

Propriété exclusive de FormaV. Toute reproduction ou diffusion interdite sans autorisation.

Copyright © 2026 FormaV. Tous droits réservés.

Ce document a été élaboré par FormaV© avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV©, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV© se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.

Copyright © 2026 FormaV. Tous droits réservés.

Ce document a été élaboré par FormaV© avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV©, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV© se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.